

# 冲击载荷作用下夹层扁锥壳的非线性动力屈曲\*

徐加初<sup>1,2</sup>, 方焕斌<sup>2</sup>

(1. 暨南大学重大工程灾害与控制教育部重点实验室, 广东 广州 510632;

2. 暨南大学力学与土木工程系, 广东 广州 510632)

**摘 要:** 研究了夹层扁锥壳在三角脉冲冲击载荷作用下的非线性动力屈曲问题。基于 Reissner 假设和 Hamilton 原理, 导出了夹层扁锥壳在冲击载荷作用下的非线性动力控制方程; 采用 Galerkin 方法和 Runge-Kutta 方法对控制方程进行数值求解, 得到非线性动力响应曲线; 应用 Budiansky-Roth 准则确定了冲击屈曲的临界荷载; 讨论了壳体几何尺寸和物理参数对夹层扁锥壳冲击屈曲的影响; 数值算例表明本文方法是可行的。

**关键词:** 夹层扁锥壳; 三角脉冲; 冲击屈曲

**中图分类号:** O343.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) S2-0062-05

近些年来, 夹层结构由于具有重量轻、刚度大等优良的特性, 使得夹层壳体单元在航空、航天、船舶、潜艇以及建筑中得到广泛的应用, 对夹层结构的研究在过去几十年中得到了很大的发展。关于夹层板壳的非线性问题研究方面, Stuck<sup>[1]</sup>、刘人怀<sup>[2-4]</sup>、徐加初<sup>[5-7]</sup>等对夹层扁球壳的非线性稳定、夹层矩形板和夹层扁球壳的非线性动力稳定问题进行过研究, 得到了一些有实际意义的结果。

近些年来, 夹层结构由于具有重量轻、刚度大等优良的特性, 使得夹层壳体单元在航空、航天、船舶、潜艇以及建筑中得到广泛的应用, 对夹层结构的研究在过去几十年中得到了很大的发展。关于夹层板壳的非线性问题研究方面, Stuck<sup>[1]</sup>、刘人怀<sup>[2-4]</sup>、徐加初<sup>[5-7]</sup>等对夹层扁球壳的非线性稳定、夹层矩形板和夹层扁球壳的非线性动力稳定问题进行过研究, 得到了一些有实际意义的结果。

本文研究的是表层很薄, 夹心相对较软的夹层扁锥壳。采用 Reissner<sup>[8]</sup>假设, 即假定表层处于薄膜应力状态, 夹心横向不压缩, 夹心只能承受横向载荷作用, 壳体的中面法线变形时保持为直线。在上述假设下给出壳体的位移场, 利用 Hamilton 原理导出夹层壳体在均匀冲击载荷下的非线性屈曲问题的控制方程; 通过假定变形模态, 用 Galerkin 方法得到非线性动力响应方程, 用 Runge-Kutta 方法对动力响应方程进行数值求解, 并采用以顶点挠度表达的 B-R 准则<sup>[9]</sup>确定冲击屈曲。以顶点挠度表达的 B-R 准则可表述为: 当冲击载荷有较小的增量时, 扁锥壳的顶点挠度发生急剧增加, 则认为壳

体发生屈曲。

## 1 基本方程以及边界条件

考虑图 1 所示的半径为  $a$ , 表层厚度为  $h_1$ , 夹心厚度为  $h$ , 在均布冲击载荷  $q(t)$  作用下的夹层扁锥壳, 用  $\kappa$  和  $z$  分别表示径向、周向和法向坐标, 下标 1, 2 和 3 分别对应上表层、夹心和下表层, 设  $u_i$ 、 $v_i$  和  $w_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 分别表示壳体内任一点的位移,  $u$  和  $w$  分别是中面上的径向位移和挠度,  $\theta$  是未变形中面的法向转角。在轴对称条件和 Reissner 假设下, 壳体内任一点的位移为:

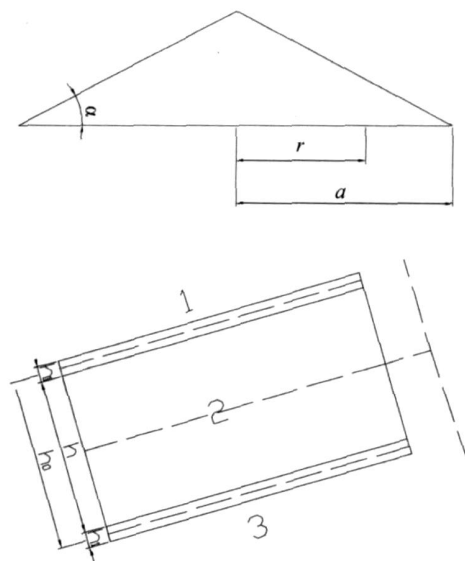


图 1 夹层扁锥壳的几何尺寸和载荷

ig. 1 Geometry and load of shallow spherical sandwich shells

\* 收稿日期: 2008 - 09 - 03

作者简介: 徐加初 (1964年生), 男, 博士; E-mail: txjch@jnu.edu.cn

$$\begin{cases} u_1 = u + \frac{h_0}{2}, & v_1 = 0, & w_1 = w \\ u_3 = u - \frac{h_0}{2}, & v_3 = 0, & w_3 = w \\ u_2 = u + z, & v_2 = 0, & w_2 = w \end{cases} \quad (1)$$

公式 (1) 中,  $h_0 = h + h_1$  表示上、下表层中心的距离。利用壳体大挠度下的应变 - 位移关系和应力 - 应变关系, 计算壳体的变形能和外力所做的功, 应用 Hamilton 原理, 导出夹层扁锥壳在均布冲击载荷下的非线性动力控制方程:

$$G_2 h_0 \frac{\partial}{\partial r} [r (\frac{\partial w}{\partial r})] + 2h_1 \frac{\partial}{\partial r} [r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \dots] - m r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r q(t) = 0 \quad (2)$$

$$D r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \frac{\partial w}{\partial r}) - G_2 h_0 r (\frac{\partial w}{\partial r}) = 0$$

$$\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} (r \cdot \frac{\partial w}{\partial r}) - \dots = - E \frac{dw}{dr} (\frac{1}{2} \frac{dw}{dr} + \dots)$$

考虑工程上常遇到的外边缘为刚性夹紧固定支承情况, 其边界条件可表示为:

$$\begin{aligned} \text{当 } r = a \text{ 时, } & w = 0, \quad \dots, \quad u = 0 \\ \text{当 } r = 0 \text{ 时, } & \dots = 0, \quad \dots \text{ 有限} \end{aligned} \quad (3)$$

引入下列无量纲参量:

$$\begin{aligned} y = \frac{r}{a}, \quad W = \frac{2 \sqrt{1-\nu^2}}{h_0} w, \quad \dots = \frac{2 \sqrt{1-\nu^2}}{h_0} a \cdot \dots \\ S = \frac{2h_1 a}{D} \frac{\partial}{\partial r}, \quad k_1 = \frac{2 \sqrt{1-\nu^2}}{h_0} a \end{aligned} \quad (4)$$

$$k_2 = \frac{D}{G_2 h_0 a^2}, \quad \dots = \sqrt{\frac{D}{m a^4}} t, \quad P(\cdot) = \frac{2 \sqrt{1-\nu^2}}{h_0} \frac{a^4}{D} q(t)$$

借助于式 (4), 方程 (2) 化成:

$$L(W, \dots, S) = \frac{\partial}{\partial y} [S (\frac{\partial W}{\partial y} + k_1)] + k_2 \frac{\partial}{\partial y} [y (\dots + \frac{\partial W}{\partial y})] + P(\cdot) y - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} y = 0 \quad (5a)$$

$$y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \frac{\partial W}{\partial y}) - k_2 y (\dots + \frac{\partial W}{\partial y}) = 0 \quad (5b)$$

$$y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y S) = - \frac{\partial W}{\partial y} (\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial y} + k_1) \quad (5c)$$

边界条件 (3) 可表示成:

当  $y = 1$  时,

$$W = 0, \quad \dots = 0, \quad \frac{dS}{dy} - \frac{S}{y} = 0 \quad (6a, b, c)$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } \dots = 0, \quad S = 0 \quad (7a, b)$$

## 2 非线性动力方程的求解

采用 Galerkin 方法对冲击问题的非线性控制方程 (5) 进行求解。考虑轴对称载荷作用下夹层扁

球壳的动力屈曲主要表现为轴对称模态以及基模态下具有最小临界荷载的事实, 选取夹层扁球壳静力小挠度问题的挠曲函数作为壳体的冲击屈曲模态是合适的。设  $W(y, \cdot)$  具有时间和空间的可分离形式:

$$W(y, \cdot) = f(\cdot) G_1(y) \quad (8)$$

$G_1(y)$  是均布荷载作用下夹层扁锥壳小挠度问题的挠曲函数,  $f(\cdot)$  表示壳体的顶点挠度,  $G_1(y)$  的表达式为:

$$G_1(y) = a_1 y^4 + a_2 y^2 + a_3$$

其中

$$a_1 = \frac{k_2}{16 + k_2}, \quad a_2 = - \frac{16 + 2k_2}{16 + k_2}, \quad a_3 = 1;$$

将式 (8) 代入方程 (5c) 中并利用边界条件 (6c) 和 (7b), 方程 (5c) 的解为

$$S = f^2(\cdot) G_3(y) + f(\cdot) G_4(y) \quad (9)$$

这里

$$G_2(y) = b_1 y^7 + b_2 y^5 + b_3 y^3 + b_4 y,$$

$$G_3(y) = b_5 y^4 + b_6 y^2 + b_7 y$$

其中

$$b_1 = - \frac{a_1^2}{6}, \quad b_2 = - \frac{a_1 a_2}{3}, \quad b_3 = - \frac{a_2^2}{4},$$

$$b_4 = - \frac{1}{(1-\nu^2)} [(7-\nu^2) b_1 + (5-\nu^2) b_2 + (3-\nu^2) b_3]$$

$$b_5 = - \frac{4a_1 k_1}{15}, \quad b_6 = - \frac{2a_2 k_1}{3},$$

$$b_7 = - \frac{1}{(1-\nu^2)} [(4-\nu^2) b_5 + (2-\nu^2) b_6]$$

将式 (8) 和 (9) 代入方程 (5a) 中, 并从方程

(5a) 得到  $y (\dots + \frac{\partial W}{\partial y})$  的表达式, 然后代入方程

(5b) 中, 利用边界条件 (6b) 和 (7a), 方程 (5b) 的解为:

$$= f(\cdot) G_4(y) + P(\cdot) G_5(y) +$$

$$f^3(\cdot) G_6(y) + f^2(\cdot) G_7(y) + f(\cdot) G_8(y) \quad (12)$$

这里

$$G_4(y) = d_1 y^7 + d_2 y^5 + d_3 y^3 + d_4 y,$$

$$G_5(y) = d_5 y^3 + d_6 y,$$

$$G_6(y) = d_7 y^{11} + d_8 y^9 + d_9 y^7 + d_{10} y^5 + d_{11} y^3 + d_{12} y,$$

$$G_7(y) = d_{13} y^8 + d_{14} y^6 + d_{15} y^5 + d_{16} y^4 + d_{17} y^3 + d_{18} y^2 + d_{19} y,$$

$$G_8(y) = d_{20} y^5 + d_{21} y^3 + d_{22} y^2 + d_{23} y$$

其中

$$d_1 = \frac{a_1}{6h(7)}, \quad d_2 = \frac{a_2}{4h(5)}, \quad d_3 = \frac{a_3}{2h(3)},$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= - \sum_{i=1}^3 d_i, & d_5 &= - \frac{1}{2h(3)}, & d_6 &= - d_5, \\
 d_7 &= - \frac{4a_1 b_1}{h(11)}, & d_8 &= - \frac{(2a_2 b_1 + 4a_1 b_2)}{h(9)}, \\
 d_9 &= - \frac{(2a_2 b_2 + 4a_1 b_3)}{h(7)}, & d_{10} &= - \frac{(2a_2 b_3 + 4a_1 b_4)}{h(5)}, \\
 d_{11} &= - \frac{2a_2 b_4}{h(3)}, & d_{12} &= - \sum_{i=7}^{11} d_i, \\
 d_{13} &= - \frac{(k_1 b_3 + 4a_1 b_3)}{h(8)}, & d_{14} &= - \frac{(k_1 b_2 + 4a_1 b_2 + 2a_2 b_3)}{h(6)}, \\
 d_{15} &= - \frac{4a_1 b_7}{h(5)}, & d_{16} &= - \frac{(k_1 b_3 + 2a_2 b_6)}{h(4)}, \\
 d_{17} &= - \frac{2a_2 b_7}{h(3)}, & d_{18} &= - \frac{k_1 b_7}{h(2)}, & d_{12} &= - \sum_{i=13}^{18} d_i, \\
 d_{20} &= - \frac{k_1 b_3}{h(5)}, & d_{21} &= - \frac{k_1 b_6}{h(3)}, \\
 d_{22} &= - \frac{k_1 b_7}{h(2)}, & d_{23} &= - \sum_{i=20}^{22} d_i,
 \end{aligned}$$

其中  $h(x) = x^2 - 1$ 。

将式 (8)、(9) 和 (10) 代入方程 (5a) 式, 并对方程 (5a) 应用 Galerkin 方法, 得到

$$\int_0^1 L(W, \dot{W}, S) W y dy = 0 \quad (13)$$

对式 (13) 经过一系列运算, 得到以壳体顶点挠度  $f(t)$  表示的冲击载荷下的动力响应方程

$$\begin{aligned}
 f''''(t) + \frac{1}{1} f''(t) + \frac{3}{1} f'(t) + \\
 \frac{4}{1} f(t) = \frac{5}{1} P(t) \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_0^1 y G_1(y) \{ k_2 \frac{d}{dy} [G_5(y) y] - y G_1(y) \} dy, \\
 2 &= \int_0^1 y G_1(y) \frac{d}{dy} \{ k_1 G_3(y) + k_2 [G_8(y) + G_9(y)] \} dy, \\
 3 &= \int_0^1 y G_1(y) \frac{d}{dy} \{ k_1 G_2(y) + G_3(y) G_5(y) + k_2 y G_7(y) \} dy, \\
 4 &= \int_0^1 y G_1(y) \frac{d}{dy} \{ G_2(y) G_9(y) + k_2 y G_6(y) \} dy, \\
 5 &= - \int_0^1 y G_1(y) \{ y + k_2 \frac{d}{dy} [G_5(y) y] \} dy
 \end{aligned}$$

采用变步长四阶 Runge-Kutta 对方程 (14) 进行数值求解。

### 3 数值算例与结果分析

考虑图 1 所示夹层扁锥壳, 讨论壳体在外边缘为刚性夹紧固定边界条件下, 承受图 2 所示三角脉冲冲击载荷作用, 计算参数如下所示:

$$a = 200\text{mm}, \quad h_0 = 10\text{mm}, \quad h_1 = 1\text{mm},$$

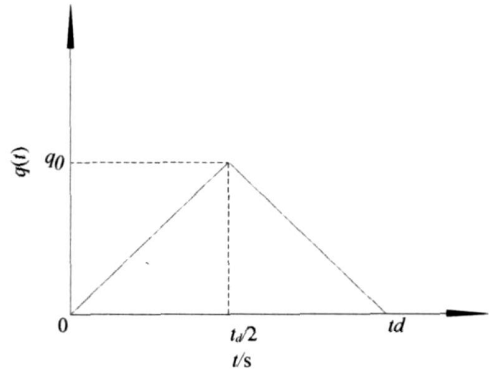


图 2 三角形脉冲冲击载荷  
Fig. 2 Triangular pulse load

$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.25, \\
 m &= 1.56 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^2, \quad G = 2.1 \text{ GPa} \\
 q(t) &= \begin{cases} \frac{2q_0}{t_d} t, & 0 \leq t \leq \frac{t_d}{2}, \\ 2q_0 - \frac{2q_0}{t_d} t, & \frac{t_d}{2} < t \leq t_d, \\ 0, & t > t_d \end{cases} \quad (15)
 \end{aligned}$$

计算结果见图 3 和图 4。

图 3 表示壳体顶点的位移 - 时间响应曲线, 从图 3 中可以看出, 当无量纲冲击荷载幅值  $P_0 = 647$  时, 不同  $P_0$  值下的响应曲线基本相同, 而当  $P_0 > 647$  时,  $P_0$  值的微小增大, 顶点位移响应曲线发生了急剧的变化, 这表明壳体发生了屈曲,  $P_0 = 647$  即为临界冲击屈曲载荷; 同时从图 3 中还可以看出, 对于冲击载荷作用下的扁锥壳冲击响应, 在冲击载荷作用时间内, 壳体做强迫振动, 冲击载荷结束后, 壳体将做自由振动。

图 4 给出了当  $k_2 = 20, \nu = 0.25$  和各种不同几何参数  $k_1$  值时的壳体顶点位移在冲击过程中的最

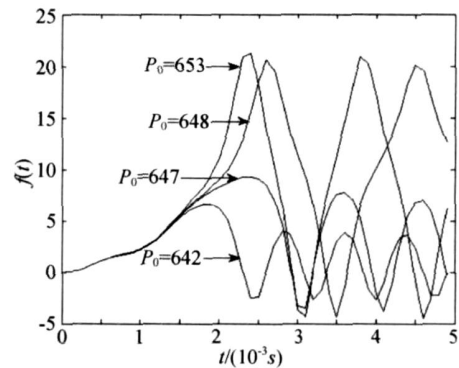


图 3 不同  $P_0$  下的时间 - 位移响应曲线 ( $k_1 = 8, k_2 = 20$ )  
Fig. 3 Time-displacement curves for different load parameters  $P_0$  ( $k_1 = 8, k_2 = 20$ )

大值  $f(t)_{\max}$  与冲击荷载幅值  $P_0$  的关系曲线。从图 4 中可以看出，当  $k_1$  值较小时，载荷-位移曲线变化比较缓慢，这表明夹层扁锥壳较扁时壳体的冲击屈曲不明显或者不发生屈曲；而  $k_1$  值较大时，当载荷达到某一值时，壳体的挠度急剧增大，这表示壳体发生了屈曲。根据 B-R 准则，此时对应的载荷定义为临界冲击屈曲载荷。从图 4 中还可看出，随着  $k_1$  值的增大，冲击临界屈曲载荷增大，这与夹层扁锥壳的静力屈曲情况相一致。

图 5 给出了当  $k_1 = 8, \nu = 0.25$  时在各种不同物理参数  $k_2$  值时的壳体顶点位移在冲击过程中的最大值  $f(t)_{\max}$  与冲击荷载幅值的关系曲线。从图 5 中可以看出，对于一个特定的  $k_1$  值，随着  $k_2$  值的增大，临界冲击屈曲载荷增大。

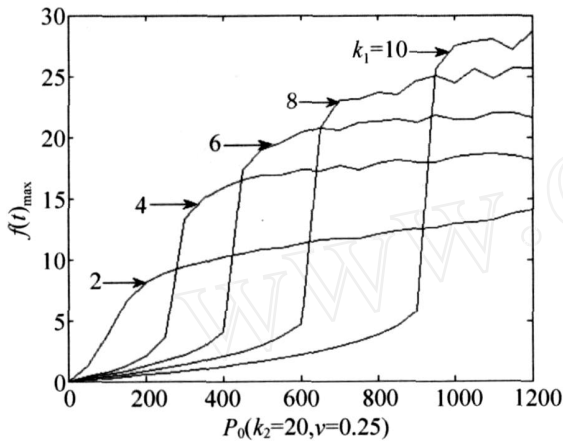


图 4 不同几何参数  $k_1$  下载荷-位移曲线 ( $k_2 = 20$ )

Fig. 4 Load-displacement curves for different geometric parameters  $k_1$  ( $k_2 = 20$ )

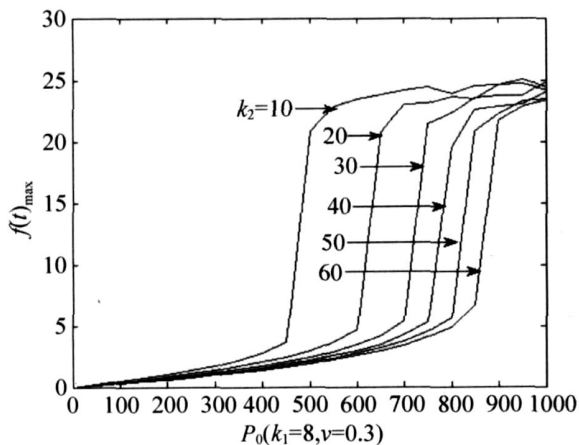


图 5 不同物理参数  $k_2$  下载荷-位移曲线 ( $k_1 = 8$ )

Fig. 5 Load-displacement curves for different physical parameters  $k_2$  ( $k_1 = 8$ )

## 4 结 论

(1) 通过选取夹层扁锥壳静力小挠度问题的挠曲函数作为壳体的轴对称冲击屈曲模态，采用 Galerkin 方法研究夹层扁锥壳冲击屈曲是可行的。

(2) 夹层扁锥壳较扁时壳体的冲击屈曲不明显或者不发生屈曲，壳体屈曲以后，冲击临界屈曲载荷随着  $k_1$  值的增大而增大。

(3) 对于一个特定的  $k_1$  值，冲击临界屈曲载荷随着  $k_2$  值的增大反而减小。

### 参考文献：

- [1] STUCK R. Nonlinear stability problem of an open conical sandwich shell under external pressure and compression [J]. *Int J Non-Linear Mech*, 1984, 19: 127 - 233.
- [2] LIU R H, WU J C. Nonlinear vibration of rectangular sandwich plates [J]. *Science in China (Series A)*, 1992, 35 (4): 472 - 486.
- [3] LIU R H, CHENG Z Q. On the nonlinear buckling of circular shallow spherical sandwich shells under the action of uniform edge moments [J]. *Int J Nonlinear Mech*, 1995, 30 (1): 33 - 43.
- [4] LIU R H, LI Jun. Nonlinear vibration of shallow conical sandwich shells [J]. *Int J Nonlinear Mech*, 1995, 30 (2): 97 - 109.
- [5] 徐加初, 王乘, 黄玉盈, 等. 夹层扁球壳的非线性稳定性 [J]. *固体力学学报*, 2000, 21 (4): 366 - 370.  
XU Jiachu, WANG Cheng, Huang Yuyin, et al. Nonlinear stability of shallow spherical sandwich shells [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 21 (4): 366 - 370.
- [6] 徐加初, 杨洪武, 王乘. 夹层矩形板的非线性动力屈曲 [J]. *华中理工大学学报*, 2000, 28 (11): 101 - 103.  
XU Jiachu, YANG Hongwu, WANG Cheng. Nonlinear dynamic buckling of rectangular sandwich plates [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2000, 28 (11): 101 - 103.
- [7] 徐加初, 杨增涛. 夹层扁球壳在冲击作用下的非线性动力屈曲 [J]. *南昌大学学报: 理科版*, 2007, 31 (专辑): 160 - 163.  
XU Jiachu, YANG Zengtao. Nonlinear dynamic buckling of shallow spherical sandwich shells subjected to impact [J]. *Journal of Nanchang University (Natural Science)*, 2007, 31 (Suppl): 160 - 163.
- [8] REISSNER E. Finite deflection of sandwich plates [J]. *J Aeronaut Sci*, 1950, 17: 125 - 130.
- [9] BUDANSKY B, ROTH R S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells [J]. *NASA Technical Note*, D - 510, 1962: 597 - 609.

## Nonlinear Dynamic Buckling of Shallow Conical Sandwich Shells Subjected to Impact

XU Jia-chu<sup>1,2</sup>, FANG Huan-bin<sup>2</sup>

(1. Key Lab of Disaster Forecast and Control in Engineering, Ministry of Education of the People's Republic of China Guangzhou 510632, China;

2. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

**Abstract:** The nonlinear dynamic buckling of shallow conical sandwich shells under the action of a triangular pulse is investigated. Based on Reissner's Hypothesis and variational principle, the nonlinear dynamic governing equation is obtained and solved by Galerkin and Runge-Kutta methods. Budiansky-Roth motion criterion expressed by the peak displacement is adopted to define the critical impact buckling load. The effects of geometric and physical parameters on the impact buckling of shallow conical sandwich shells are discussed. Numerical results show the feasibility of the Galerkin Method.

**Key words:** shallow conical sandwich shells; triangular pulse; nonlinear dynamic buckling

www.cnki.net